Термодинамика и статистическая физика
Практические занятия

1. ***Основные принципы статистики***

Постройте фазовую траекторию электрона, который движется вдоль электрического поля.

Частица с массой m движется вдоль оси z в однородном гравитационном поле. В начальний момент $t=0$ ее состояние таково (z_0, p_0). Нарисуйте фазовую траєкторію частицы. Убедитесь в том, что теорема Лиувилля справедлива.

Проверить справедливость теоремы Лиувилля для трех гармонических осцилляторов:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}}\sin\omega t, x_1 = \sqrt{\frac{2(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}{m\omega^2}}\sin\omega t, x_1 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}}\sin(\omega t+\delta).$$

Найти число состояний и плотность состояний для классического гармонического осциллятора.

Найти энергетический спектр квантового гармонического осциллятора.
Указание: использовать представление Меллина для функции числа состояний.

Показать, что статистический оператор чистого стационарного состояния с энергией E при отсутствии вырождения можно записать в виде $\hat{\rho} = \left[Sp\delta\left(E-\hat{H}\right)^{-1}\right]\delta\left(E-\hat{H}\right)$. Распространить результат на случай системы с микроканоническим распределением.

Вычислить плотность состояний классического сферического маятника.

Вычислить плотность состояний для нерелятивистского одноатомного ферми-бозе газа с законом дисперсии $\varepsilon(\vec{p}) = \vec{p}^2/2m$.

Вычислить плотность состояний для нерелятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле, пренебрегая спиновым расщеплением энергетических уровней.

Вычислить плотность состояний электрона в пленке толщиной a. Его масса равна m. Площадь пленки S настолько велика, что можно не учитывать краевые эффекты в плоскости (x, y).

Найти плотность состояний одномерного осциллятора методом преобразования Лапласа.

Используя преобразование Лапласа, найти функцию $Z(\beta)$ и плотность состояний системы N не взаимодействующих частиц в объеме V, где потенциальная энергия частицы равна u_0. За пределами этого объема потенциальная энергия бесконечно велика.

Вычислите плотность состояний электронного газа на поверхности трубки в продольном магнитном поле. Энергия электрона имеет вид

$$\varepsilon_{mk\sigma} = \varepsilon_0 \left(m + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} + \sigma \mu_B H \,,$$

где m_0 и μ_B – масса электрона и спиновый магнитный момент, $\hbar m$ и $\hbar k$ – проекции его углового момента и импульса на ось трубки, $\varepsilon_0 = \hbar^2 / 2m_0 a^2$, a – радиус трубки, $\Phi = \pi a^2 H$ – поток магнитного поля H через сечение трубки, $\Phi_0 = 2\pi c\hbar / e$ – квант потока, $\sigma = \pm 1$ – спиновое квантове число.

Вычислите плотность состояний релятивистской частицы, энергия которой равняется $\varepsilon = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$.

Вычислите плотность состояний релятивистской частицы, которая движется на плоскости.

Вычислить плотность состояний конического маятника.

Обобщите квантовое уравнение Лиувилля на случай взаимодействия подсистемы с термостатом и внешним полем.

Вычислить тензор проводимости идеального электронного газа, возмущаемого однородным электрическим полем, меняющимся со временем по гармоническому закону.

Проверить справедливость теоремы Лиувилля для случая упругого соударения двух частиц, движущихся по одной прямой.

Определить энтропию системы N независимых частиц, каждая из которых может иметь энергию $-\varepsilon_0$ или $+\varepsilon_0$.

Найти распределение по координатам $\rho(x)$ для классического гармонического осциллятора.

Найти распределение по импульсам $\rho(p)$ для классического гармонического осциллятора.

Две частицы находятся в одномерной потенциальной яме шириной a. Энергия системы E. Найти распределение по энергии $\rho(\varepsilon)$ для одной из частиц.

N частиц идеального газа находятся в объеме V и имеют энергию E. Вычислить энтропию газа. Найти распределение по энергии для одной частицы. Рассмотреть предел $E \to \infty, N \to \infty, \frac{E}{N} \to \bar{\varepsilon}$.

Вычислить среднее по времени значение некоторой величины, относящейся к гармоническому осциллятору и сравнить его со средним, полученным в рамках микроканонического ансамбля.

Доказать соотношение $\nu_{3D}(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon_1 \nu_{1D}(\varepsilon_1) \nu_{2D}(\varepsilon - \varepsilon_1)$.

Покажите, что число состояний и плотность состояний двух подсистем 1 и 2 с энергиями E_1 и E_2, которые обмениваются энергией, равны

$$\Gamma(E) = \int_0^E dE_1 \Gamma_2(E - E_1) \nu_1(E_1), \quad \nu(E) = \int_0^E dE_1 \nu_1(E_1) \nu_2(E - E_1).$$

2. ***Термодинамические величины***

Вычислить значение выражения:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P - \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V .$$

Доказать тождество:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \frac{T}{C_P}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2 .$$

Вычислить коэффициент полезного действия воздушной машины, работающей по циклу Стирлинга, состоящему из двух изотерм $T = T_1$ и $T = T_2$, двух изохор $V = V_1$ и $V = V_2$ и сравнить его с коэффициентом полезного действия машины, работающей по циклу Карно с теми же температурами.

Найти разность теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме для системы с неизменным числом частиц.

Используя уравнение неразрывности и уравнение движения идеальной жидкости выразить в линейном по возмущениям приближении скорость звука в такой системе через изотермический модуль всестороннего сжатия $K_T = \rho\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T$.

Связать изменение температуры при изменении плотности жидкости в звуковой волне со скоростью распространения звука.

Докажите сотношение Гиббса-Дюгема $SdT - VdP + \sum_i N_i d\mu_i = 0$.

Получить барометрическую формулу для идеального газа в поле силы тяжести с помощью условия равновесия тел во внешнем поле.

Определить внутреннюю энергию и энтропию диэлектрика, помещенного в конденсатор с напряженностью электрического поля $\vec{E}$.

3. ***Распределение Гиббса***

Найти среднюю энергию движения квантовой частицы с одной степенью свободы в одномерном термостате, который представляет собой ящик длиной L с зеркально отражающими частицу стенками. Определить энтропию системы.

Використовуючи ізобарично-ізотермічний ансамбль, розрахуйте термодинамічні функції ідеального газу.

4. ***Идеальные макроскопические системы***

Получить уравнение состояния классического идеального газа.

Вычислить химический потенциал идеального газа.

Вычислить свободную и внутреннюю энергию идеального газа, находящегося во вращающейся с частотой ω центрифуге радиуса R и высоты Н.

Найти свободную и внутреннюю энергию столба одноатомного идеального газа в форме прямоугольного параллелепипеда высоты H и площади Ω, находящегося в поле силы тяжести.

Вычислить термодинамические характеристики двухатомного газа.

В постоянном и однородном магнитном поле $\vec{H}$ в термостате находится идеальный газ, частицы которого обладают магнитными моментами $\vec{\mu}$. Вычислить среднюю намагниченность газа.

Вычислить внутреннюю энергию, энтропию, теплоемкость системы N невзаимодействующих частиц со спином $1/2$ при температуре T, помещенных в магнитное поле H.

Вычислите термодинамические функции релятивистского идеального электронного газа.

В цилиндрическом сосуде под движущимся поршнем массы M находится идеальный газ, давление которого равно P. Площадь поршня S, высота столба газа под ним равняется H. Поршень начинает падать без начальной скорости, сжимая газ. Найти максимальную скорость поршня, если газ сжимается: а) изотермически, б) адиабатически.

Вычислите статистический вес и энтропию спиновой цепочки, предполагая, что спин частицы равен $\frac{1}{2}$.

Рассчитать классическую вращательную сумму, используя для описания микроскопических состояний двухатомной молекулы сферические координаты.

Для частицы, движущейся в объеме V, найти матрицу плотности в координатном представлении, решая уравнение Блоха.

Найти матрицу плотности для квантового гармонического осциллятора в координатном и импульсном представлениях. Используя полученные результаты, вычислить $\langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle$.

Построить оператор плотности одномерного гармонического осциллятора в координатном представлении.

Спиновый гамильтониан электрона в магнитном поле $\hat{H} = -\mu\hat{\sigma}\vec{B}$,
где μ- магнетон Бора, $\hat{\sigma}$- спиновый оператор Паули, $\vec{B}$- индукция магнитного поля. Считая ось z направленной вдоль магнитного поля, найти среднее значение σ_z в ансамбле с фиксированной температурой.

5. И***деальные ферми-иі бозе-газы***

Получить уравнение состояния идеального электронного газа при низких температурах.

Найти теплоемкость C_V при постоянном объеме нерелятивистского
ферми-газа с произвольным законом дисперсии электронов при низких температурах.

Найти зависимость от температуры химического потенциала бозе-газа.

Найти скачок производной $\partial C_V / \partial T$ идеального бозе-газа при $T = T_0$.

Выяснить, как однородное гравитационное поле влияет на температуру бозе-эйнштейновской конденсации.

Докажите формулу Эйнштейна для $\overline{(\Delta E_{\Delta\omega})^2}$ черного излучения.

Вычислите термодинамические функции полупроводника с эффективными массами электронов m_e и дырок m_h.

Найдите вклад внутренних степеней свободы частиц идеального бозе-газа на температуру бозе-эйнштейновской конденсации.

Найдите статистический вес твердого тела в модели Дебая.

Вычислите термодинамические функции одномерной и двумерной модели Дебая.

Найти среднюю энергию полностью вырожденного электронного газа в висмуте, считая что $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_g^2}{4} + \dfrac{\varepsilon_g}{2} m_{ik}^{-1} p_i p_k}$.

В зонной теории собственных полупроводников и полуметаллов термодинамический потенциал Ω электронной системы дается выражением

$$\Omega = -kT \sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \rho_i(\varepsilon) \ln\left(1 + \exp\frac{\mu - \varepsilon}{kT}\right),$$

где суммирование производится по электронным зонам. Рассматривая приближение двух зон - валентной зоны и зоны проводимости, выяснить, как запишется термодинамический потенциал после перехода к “дырочному” представлению”, когда вместо электронов в валентной зоне рассматриваются положительно заряженные дырки.

Энергия электрона в магнитном поле H равна $\sigma\mu_B H$ ($\sigma = \pm 1$ в зависимости от того, параллелен или антипараллелен полю спиновый магнитный момент электрона). Вычислить магнитную восприимчивость системы свободных электронов в случае полного вырождения. Найти химический потенциал. Считать, что $\mu \rangle\rangle \mu_B H$.

Предполагая сильное вырождение $kT\langle\langle\mu$, найти магнитную восприимчивость, обусловленную орбитальным движением электронов в слабом магнитном поле $\mu_B H\langle\langle kT$.

6. ***Неидеальный газ***

Вычислить химический потенциал газа Ван-дер-Ваальса.

Найдите зависимость потенциала Гиббса Φ газа Ван-дер Ваальса от давления, если температура газа постоянна и меньше критической.

Получите уравнение состояния двумерного неидеального газа.

7. ***Флуктуации***

Найти дисперсию угла отклонения от вертикали математического маятника в среде при температуре T.

Определить, как изменится спектральная плотность $J(\omega)$ случайного стационарного процесса $x(t)$, если показания прибора, измеряющего значение $x_m(t)$, соответствует среднему значению этой величины за время каждого измерения τ: $x_m(t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2}dt'x(t')$.

Какую среднюю тепловую скорость броуновской частицы мы обнаружим при визуальном измерении за промежуток времени $\tau=0.1c$? Масса частицы $m=10^{-12}g$, линейный размер $R=10^{-4}cm$, температура среды T, вязкость среды $\eta=10^{-2}\frac{g}{cm*\sec}$.

Обобщите результаты метода Кубо на случай феноменологического учета взаимодействия системы с термостатом в приближении времени релаксации.

Одной из основных причин молекулярного рассеяния света являются флуктуации плотности. В спектре рассеянного света наблюдается триплет, центральная компонента которого обусловлена флуктуациями энтропии, а боковые, связанные с доплеровским смещением в звуковой волне – флуктуациями давления. Найти отношение интенсивности центральной компоненты к интенсивности компонент дублета.

Получить функцию распределения по флуктуациям энергии в гауссовом приближении, исходя из классической функции распределения в каноническом ансамбле.

Рассмотреть тепловые флуктуации в замкнутой цепи, состоящей из сопротивления R и индуктивности L, помещенной в термостат с температурой T. Определить спектральную плотность теплового шума ЭДС ε и тока I в цепи. Найти выражение для корреляционной функции $\left\langle I(t+\tau)I(t)\right\rangle$.

8. *Фазовые переходы*

В рамках феноменологического подхода, разработанного Вейссом, получить уравнение состояния реального магнетика.

Вычислить корреляционный радиус флуктуаций параметра порядка в окрестности критической точки.

Вычислить изотермическую сжимаемость вблизи критической точки.

Вычислить теплоемкость вблизи критической точки.

Почему производная $\partial P/\partial T$ в точках кривой равновесия фаз 1–3 на рис. 8.4 (См. Вступ) больше, чем производная в точках равновесия фаз 2–3.

Покажите, что изменение температуры поверхности раздела фаз при ее адиабатическом расширении определяется условием $\Sigma \dfrac{d\sigma}{dT} = \mathrm{const}$.

Почему при внезапном расширении газа в камере Вильсона возникает перенасыщенный пар?

9. ***Растворы***

Найти изменение концентрации с высотой для раствора, находящегося в поле силы тяжести.

Используя закон Рауля и уравнение Гиббса-Дюгема, получить закон Генри, а также химический потенциал растворенного вещества в слабом растворе.

Что будет происходить при нагревании твердого раствора, если его начальное состояние соответствует точке в области β-фазы на рис. 9.3 (См. Вступ) ?

10. ***Поверхности***

Определить форму жидкой пленки, края которой закреплены на двух одинаковых параллельных окружностях, центры которых лежат на общей прямой, перпендикулярной к их плоскостям.

Определить форму поверхности жидкости, поднявшейся между двумя вертикальными параллельными плоскими пластинками.

Найти вероятность образования зародыша произвольного размера.

Адсорбирующая поверхность, находящаяся в контакте с идеальным газом с химпотенциалом μ, содержит N узлов, каждый из которых может адсорбировать одну молекулу газа. Предполагая, что адсорбированная молекула имеет энергию $-\varepsilon_0$, определить коэффициент адсорбции.

Найти изменение температуры фазового перехода над кривой поверхностью.

11. ***Элементы кинетики***

Электронный газ находится в квантующем магнитном $\vec{H}$ и перпендикулярном к нему электрическом поле $\vec{E}, E \langle\langle H$. Считая, что частота столкновений мала по сравнению с циклотронной частотой $\Omega = \dfrac{eH}{mc}$, вычислить тензор проводимости σ_{ik}. Рассмотреть, в частности, рассеяние на точечных дефектах $V = v_0 \sum\limits_i \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right)$, концентрация которых n_i.

Указание: использовать уравнение для матрицы плотности, считая рассеивающий потенциал возмущением.

Из линеаризованного по внешнему однородному электрическому полю $\vec{E}$ уравнения для матрицы плотности получить кинетическое уравнение Больцмана для электронов в твердом теле при рассеянии на неподвижных примесях.

Найти плотность тока в холодной плазме, находящейся в однородном периодическом электрическом поле $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$. Найти диэлектрическую проницаемость при наличии временной дисперсии.
Указание: считать плазму электронейтральной, а положительный заряд ионов неподвижным и равномерно распределенным в пространстве.

Получить уравнение собственных колебаний плотности заряда в холодной бесстолкновительной плазме. Какое влияние оказывают столкновения?
Указание: от уравнения Больцмана перейти к уравнению для макроскопических величин $\vec{j}$ и n и воспользоваться уравнениями электродинамики.

Вычислить тензор проводимости электронного газа в металле, помещенном в однородные постоянные поля $\vec{E}$ и $\vec{H}\left(\vec{E}\perp\vec{H}\right)$.

Найти $\sigma(\omega, k)$ и $\varepsilon(\omega, k)$ для плазмы с учетом временной и пространственной дисперсии. Вычисления провести для вырожденной и невырожденной плазмы. Рассмотреть, в частности, случаи: $kv_F \langle\langle \omega$ (вырожденная плазма) и $k\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \langle\langle \omega$ (невырожденная плазма).

Получить дисперсионное уравнение для плазменных волн с учетом пространственной дисперсии. Рассмотреть случаи: $kv_F \langle\langle \omega$ (вырожденная плазма) и $k\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \langle\langle \omega$ (невырожденная плазма).

Получить дисперсионное уравнение для поперечных электромагнитных волн (ультрафиолетовая прозрачность металлов) с учетом пространственной дисперсии. Рассмотреть случаи: $kv_F \langle\langle \omega$ (вырожденная плазма) и $k\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \langle\langle \omega$ (невырожденная плазма).

Найти $\sigma_{ik}(\omega, k)$ для электронной твердотельной плазмы, находящейся в однородном постоянном магнитном поле $\omega \langle\langle \frac{eH}{mc}, kv_F \langle\langle \frac{eH}{mc}$. Получить дисперсионное уравнение для геликона.

Найти $\sigma_{ik}(\omega, k)$ для электрон-дырочной твердотельной плазмы с равным количеством электронов n_e и дырок n_h,находящейся в однородном постоянном магнитном поле $\omega \langle\langle \frac{eH}{mc}, kv_F \langle\langle \frac{eH}{mc}$.
Исследовать спектр магнитоплазменных волн. Какие изменения в спектре наблюдаются, если $n_e \neq n_h$?